УДК 681.3.06

АЛГЕБРАЇЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАСУ ГРАФОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

І.В. РЕДЬКО, Н.М. СНІГУР

Вивчено примітивні програмні алгебри багатомісних функцій над множиною скінчених графів. Дано алгебраїчну характеристику класу графових перетворювачів. Викладені результати є доповненням результатів, отриманих раніше для векторних, матричних, реляційних та табличних функцій.

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню класу обчислюваних функцій на множині графів. Обчислюваність вводиться згідно з нумераційним підходом [1]. Вибір графових структур обумовлений їх важливістю та популярністю в теоретичному та прикладному програмуванні [2–10]. Зокрема в роботах [2, 3] визначено та досліджено поняття обчислювальної функції над скінченими графами (комплексами), робота [4] присвячена вивченню граф-схем алгоритмів, [5–8] — ізоморфізму графів, [9] — питанням абстрактної обчислюваності в різних областях, [10] — графовим засобам специфікації програм. При цьому треба зазначити, що практично всі згадані дослідження акцентують увагу безпосередньо на графи, не розглядаючи задачі огляду класу обчислюваних функцій над графами (класу графових перетворювачів).

Мета роботи — надати алгебраїчну характеристику класу обчислювальних функцій над графами. В якості інструменту дослідження обрано апарат примітивних програмних алгебр (ППА). Доцільність цього вибору обгрунтована результатами, отриманими, наприклад, в [11–18]. Основну увагу приділено пошуку породжуючої множини для такої ППА. Отримані в роботі результати доповнюють результати для векторних, матричних, реляційних та табличних функцій [11–14]. Усі використані та невизначені в роботі поняття та позначення розуміються в сенсі [14].

БАЗОВІ ВИЗНАЧЕННЯ, ПОНЯТТЯ, РЕЗУЛЬТАТИ

Носій ППА можуть складати або функції, залежні від змінних [11], або n-арні функції і предикати [12, 14]. Далі ППА розуміються в другому сенсі, тому під функціями (предикатами) мається на увазі n-арні функції (предикати) для $n = 1, 2, \ldots$, хоча при їх позначенні перевага віддається не операторній, а термальній формі запису, зважаючи на її компактність [1].

Сигнатуру ППА (позначатимемо Ω) складають операції суперпозиції, розгалуження та $(n+1)$-арного циклування, що являють собою адекватні уточнення стандартних структур управління більшості мов програмування. Для зручності викладення матеріалу та його сприйняття корисно нагадати формальні визначення цих операцій [13].

1. Під суперпозицією розуміється $m+1$-арна операція, позначувана S^{m+1}, $m = 1, 2, 3, \ldots$, яка будь-якому кортежу $< \varphi, f_1, \ldots, f_m >$, де φ — m-арна функція; арність функцій f_i, $i = 1, \ldots, m$ однакова й рівна, наприклад k, ставить у відповідність нову k-арну функцію ψ, що задається як: $\psi(< x_1, \ldots, x_k >) \cong \varphi(< f_1(< x_1, \ldots, x_k >), \ldots, f_m(< x_1, \ldots, x_k >) >)$, для всіх $< x_1, \ldots, x_k >$.

2. Розгалуження (параметричне) являє собою $(m+1)$-арну операцію $\blacklozenge_{\beta}^{m+1}$, $m = 2, 3, \ldots$, β — довільна, але фіксована унарна m-значна функція з множиною значень $\{1, 2, \ldots, m\}$, яка кортежу функцій $\langle h, f_1, \ldots, f_m \rangle$ однієї арності, наприклад s, ставить в залежності від параметра β у відповідність нову s-арну функцію g таку, що $g(< x_1, .., x_s >) \cong \; \cong f_i(< x_1, .., x_s >)$, якщо $\beta(h(< x_1, .., x_s >)) = i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

3. Нарешті *циклування* являє собою $(n+1)$-арну операцію $*^{(n+1)} : \langle p, f_1, \ldots, f_n \rangle \to g$, $n = 1, 2, \ldots$, де p — предикат, а f_i, g — функції, причому арність p, f_i, g дорівнює n. Значення $g(x_1, \ldots, x_n)$ покладається рівним першій компоненті першого кортежу послідовності кортежів $\{< y_i^1, \ldots, y_i^n >, \; i = 0, 1, \ldots\}$, де $y_0^j \equiv x_j$, $y_{i+1}^j \equiv f_j(y_i^1, \ldots, y_i^n)$, $i = 0, 1, \ldots$, $j = \overline{1, n}$, для якого (позначимо його, наприклад, $< y_k^1, \ldots, y_k^n >$) $p(< y_k^1, \ldots, y_k^n >) = false$. Тобто, $g(< x_1, \ldots, x_n >) = y_k^1$. Якщо такого кортежу в послідовності не існує, то $g(x_1, \ldots, x_n)$ вважається невизначеним.

Відзначимо, що операція $*^{(n+1)}$, по суті, є досить близькою до операції циклування, що досліджувалась у роботах [11–15, 17].

Очевидно, що $p * f = *^{(n+1)}(p, f, I_2^n, \ldots, I_n^n)$, де арності p та f дорівнюють n. Звідси випливає, що всі твердження, отримані в [11–14] у межах попереднього визначення ППА, зберігаються при переході до зазначеного.

При термальному записі операцій з Ω будемо вказувати явно лише ті змінні, значення яких будуть суттєво використовуватись. Зокрема, для циклування будемо використовувати записи вигляду

$$p(x_1, \ldots, x_n) \underset{y_1 \cdots y_m}{*} \langle f_1(z_1^1, \ldots, z_{k_1}^1), \ldots, f_m(z_1^m, \ldots, z_{k_m}^m) \rangle$$

вказуючи явно лише ті змінні, значення яких будуть змінюватись. При цьому функція $f_i(z_1^i, \ldots, z_{k_i}^i)$ «керує» зміною значення змінної y_i, а змінна

y_1 вважається «вихідною». Відновлення операторного запису при цьому очевидно.

Ω складає сигнатуру ППА графових перетворювачів. Для того, щоб розглянути її носій — клас графових перетворювачів, попередньо звернемось до поняття графу. Тут будемо дотримуватись термінології, прийнятої в [13].

Під (скінченим) *орієнтованим графом* g розуміємо пару $<V,E>$, де V — деяка злічена непуста множина об'єктів, а E — бінарне відношення на V.

Стандартна інтерпретація цих об'єктів V та E у цьому визначенні така: V — множина вершин графу, E — множина його дуг.

Надалі вершини графу позначатимемо латинськими літерами u,v,w, а дуги — літерами e,p,r, можливо з індексами, $v_1,\ldots,e_1,\ldots$. У випадку необхідності явно вказати вершини дуги та її напрям, використовуватимемо позначення $<v,u>$, розуміючи, що дуга направлена від v до u.

Вершини v та u дуги $e \equiv <v,u>$ будемо називати *суміжними*. При цьому дуга e вважається *додатно інцидентною* вершині u та *від'ємно інцидентною* вершині v. Кількість дуг, що додатно (від'ємно) інцидентні вершині w називаються додатним (від'ємним) ступенем w і позначаються $\delta_g^+(w)$ ($\delta_g^-(w)$). Вершину v графу $g \equiv <V,E>$ називатимемо від'ємно (додатно) інцидентною (*від*'*ємною* (*додатною*)) до вершини w того ж графу, якщо $<w,v> \in E$ $(<v,w> \in E)$.

Прагматика дослідження, частиною якого є ця робота спонукає до виділення серед усього розмаїття графів таких, в яких E є рефлексивним. Така вимога є досить природною під час розгляду різного роду складних об'єктів, щодо яких коректно говорити про підлеглість їх складових. Тому надалі будемо розглядати тільки такі графи. Їх множину позначимо G.

Під *функціями* далі розуміємо часткові функції з аргументами і значеннями із G, а під предикатами — часткові предикати на G.

Обчислюваність на G вводиться як нумераційна обчислюваність, за допомогою арифметичної функції, що представляє цю функцію на G у зафіксованій нумерації множини G [19]. Існування такої нумерації випливає зі зліченості множини V.

Будь-яку частково-рекурсивну багатомістну функцію, або будь-який частково-рекурсивний багатомісний предикат (чр-функція, чр-предикат) будемо називати також *графовим перетворювачем*.

Через $A_G^{\text{чр}}$ позначимо ППА, носій якої складають графові перетворювачі на G. *Породжуючу множину* алгебри $A_G^{\text{чр}}$ назвемо її повною системою (ПС); ПС ППА — I_m^n *базисом*, якщо будь-яка її підсистема, що отримується видаленням будь-якого предиката, або будь-якої функції, відмінної від селекторної, вже не буде повною.

У силу зліченності множини V не буде суттєвим обмеженням, якщо покласти $V = N$. При цьому на множині вершин графу вводиться цілком природна впорядкованість.

Отримані нижче результати спираються на теореми про ізоморфізм та про базис ППА [3, 5]. У контексті цієї роботи їх можна сформулювати наступним чином.

Теорема (про ізоморфізм ППА). Бієктивне відображення $\theta_\alpha : A_G^{\text{чр}} \to$ $\to A_N^{\text{чр}}$, яке співставляє кожній функції на G арифметичну функцію, яка її представляє (у заданій нумерації α_G) є ізоморфізмом ППА $A_G^{\text{чр}}$ на ППА $A_N^{\text{чр}}$, де $A_N^{\text{чр}}$ — ППА чр-функцій та предикатів на N.

Теорема про базис ППА. Існує I_m^n-базис алгебри $A_G^{\text{чр}}$, що складається з точністю до селекторних функцій з двох функцій та одного предиката.

Під час знаходження повної системи алгебри $A_G^{\text{чр}}$ корисними будуть такі визначення та пов'язані з ними результати.

Функція f-арності n *зберігає множину* $L \subset G, L \neq \varnothing$, якщо $f(\underbrace{L \times \ldots \times L}_{n}) \subseteq L$ [4, 21].

Нехай $\beta : G \underset{\text{на}}{\to} 2^V$, де V — множина вершин (у роботі $V \equiv N$), а 2^B — множина всіх скінчених підмножин B.

Будемо казати, що функція f-арності n β — *зберігає денотати*, якщо існує скінчена множина $V_f \subset V$ така, що для будь-якого $< x_1, \ldots, x_n > \in \ \in \operatorname{dom} f$ виконується

$$\beta(f(< x_1, \ldots, x_n >)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \beta(x_i) \cup V_f .$$

Легко переконатись, що визначені властивості графових перетворювачів зберігаються в сигнатурі Ω. Таким чином, є справедливими такі необхідні умови повноти для ПС $A_G^{\text{чр}}$.

Твердження 1. Будь-яка повна система алгебри $A_G^{\text{чр}}$ для будь-якої множини L ($L \subset \mathsf{G}$, $L \neq \varnothing$) містить хоча б одну функцію, яка не зберігає цю множину для довільної множини L ($L \subset \mathsf{G}$, $L \neq \varnothing$).

Твердження 2. Будь-яка повна система алгебри $A_G^{\text{чр}}$ містить хоча б одну функцію, що не є β-зберігаючою денотати.

Під час побудови у ППА зручними є логічні зв'язки для предикатів; вони легко моделюються в ППА за допомогою всюди істинного та всюди хибного предикатів (p_T, p_F), наприклад:

$$p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(y_1, \ldots, y_m) =$$

$$= \Diamond(p(x_1, \ldots, x_n), p_{\mathrm{T}}(x_1), \Diamond(q(y_1, \ldots, y_m), p_T(x_1), p_{\mathrm{F}})),$$

$$p(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, q(y_1, \ldots, y_m) =$$

$$= \Diamond(p(x_1, \ldots, x_n), \Diamond(q(y_1, \ldots, y_m), p_T(x_1), p_{\mathrm{F}}), p_{\mathrm{F}}(x_1)),$$

$$\neg p(x_1,\ldots,x_n) = \lozenge(p(x_1,\ldots,x_n), p_{\mathrm{F}}, p_T(x_1)).$$

Позначатимемо через $[\sigma]_\Omega$ замикання множини графових перетворювачів σ операціями сукупності Ω.

ППА ЧР-ФУНКЦІЙ І ЧР-ПРЕДИКАТІВ НА МНОЖИНІ СКІНЧЕННИХ ОРІЄНТОВАНИХ ГРАФІВ

Із зазначеного вище є цілком очевидним, що будь-який граф g можна ефективно представити деякою матрицею A_g, причому ефективність такого представлення прямо витікає з її побудови.

Покладемо $n \equiv \max \delta_g^-(v_i)$; k — кількість вершин g; s_g — відсортований «по зростанню» вектор вершин g — $< v_1,...,v_k >$, а $s_g^-(v) \equiv < v_{i_1},...,v_{i_p} >$ ($s_g^+(v) \equiv < v_{i_1},...,v_{i_p} >$), де $p = \delta_g^-(v)$ ($p = \delta_g^+(v)$) — відсортований «по зростанню» вектор усіх вершин графу g, які є від'ємно (додатно) інцидентними вершині v.

Матриця A_g розмірності $((n+1)\times k)$ може бути представлена як результат виконання такої ітеративної процедури.

i-й рядок матриці A_g може бути побудований таким чином:

$$a_{i1} := s_g[i];\ \ a_{ij} \equiv \begin{cases} s_g^-(s_g[i])[j-1], & j-1 \le p \\ 0, & p < j-1 < n \end{cases},\ \ i = \overline{1,k};$$

$$s_g[i] \equiv v_i;\ \ s_g^-(v)[k] \equiv v_{i_k}.$$

Зокрема, у такому представленні порожньому графу, очевидно, відповідає порожня матриця Δ [14, 21], а графу, що являє собою сукупність непов'язаних між собою вершин із петлями, тобто графу $g \equiv < V, E >$, де E — таке відношення, що $< v,u > \in E \Leftrightarrow v,\ u \in V \,\&\, v = u$, відповідає матриця-стовпчик з перерахованими «по зростанню» вершинами графу.

$$A_g = \begin{Vmatrix} v_{i_1} \\ \vdots \\ v_{i_s} \end{Vmatrix}.$$

Використовуватимемо для графу g також більш змістовне позначення $g_{|E|}^{s_g}$, де $|E|$ — кількість дуг графу g.

Розглянемо такі функції на множині графів (граф-функції):

1. C_0^{G} — константна функція: $C_0^{\mathsf{G}}(g) = g_0^1$.

2. S_{G} — для будь-якого графу $g \ne \Delta$ збільшення на одиницю його «першої» вершини $s_g[1]$. Таким чином, якщо

$$g_n^{<v_1,\ldots,v_p>} \equiv < V, E = \{e_i \mid e_i = (v_{i_j}, v_{i_k}),\ i = \overline{1,n};\ v_{i_j}, v_{i_k} \in \{v_1,\ldots,v_p\}\} >,$$

то $S(g_n^{<v_1,\ldots,v_p>}) \equiv < V, E_1 >$, де $E_1 = E \setminus \{< s_g[1], v_j > \big| < s_g[1], v_j > \in E\} \cup E_2$. Тут $E_2 \equiv \{< s_g[1]+1,\ v_j \big| < s_g[1], v_j > \in E\}$.

3. $\hat{\cup}$ — об'єднання графів: $g_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $g_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, $g_1 \hat{\cup} g_2 = \langle V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2 \rangle$. Зокрема, у випадку коли графи розглядаються над єдиним простором вершин (у цьому випадку $V \equiv N$), для графів $g_1 = \langle V, E_1 \rangle$, $g_2 = \langle V, E_2 \rangle$ їх об'єднанням є граф $g_1 \hat{\cup} g_2 = \langle V,\ E_1 \cup E_2 \rangle$.

Усі наступні операції будемо разглядати в контексті останнього зауваження.

4. $\setminus$ — різниця графів: $g_1 = \langle V, E_1 \rangle$, $g_2 = \langle V, E_2 \rangle$, $g_1 \setminus g_2 = \langle V, E_1 \setminus E_2 \rangle$.

5. E_e — виділення «першої» дуги. Формально, це означає, що для будь-якого $g_n^{<v_1,\ldots,v_p>} = < V, E >$, $E_e(g_n^{<v_1,\ldots,v_p>}) = < V, \{< s_g[1], s_g^-(s_g[1])[1] >\} >$. Тут вираз $s_g^-(s_g[1])[1]$ очевидно означає «першу» вершину від'ємно інцидентну вершині $s_g[1]$. Надалі скрізь, де йтиметься про «першу» вершину графу, «першу» від'ємно (додатно) інцидентну вершину, «першу» дугу графу тощо, сказане розуміється нами в контексті зазначеного вище (для функцій S_{G} та E_e).

6. R — утотожнення «першої» вершини графу з «першою» від'ємно інцидентною їй вершиною. Нехай $g_n^{<v_1,\ldots,v_p>} \equiv < V, E = \{e_i \big| e_i = (v_{i_j}, v_{i_k})$, $i = \overline{1,n};\ v_{i_j}, v_{i_k} \in \{v_1,\ldots,v_p\}\} >$ та $w \equiv s_g^-(s_g[1])[1]$. Тоді

$$R(g_n^{<v_1,\ldots,v_p>}) = < V, E_1 >, \text{ де } E_1 = E \setminus \{\langle s_g[1], w \rangle\} \cup E_2.$$

Тут $E_2 \equiv \{< s_g[1], v_r > \big| v_r = s_g^-(w)[r],\ r = 1,\ldots,\delta_g^-(w)\}$.

7. A — стягування кореня графу з першою від'ємно інцидентною вершиною. Нехай

$$g_n^{<v_1,\ldots,v_p>} \equiv < V, E = \{e_i \big| e_i = (v_{i_j}, v_{i_k}),\ i = \overline{1,n};\ v_{i_j}, v_{i_k} \in \{v_1,\ldots,v_p\}\} >.$$

Тоді $A(g_n^{<v_1,\ldots,v_p>}) = < V, E_1 >$, де $E_1 = E \setminus \{< s_g[1], v_j > \big| < s_g[1], v_j > \in E\} \cup E_2$. Тут $E_2 \equiv \{< s_g^-(s_g[1])[1], v_j > \big| < s_g[1], v_j > \in E\}$.

8. $\cup^*$ — об'єднання графів g_1 та g_2 із додаванням дуги із кореня графу g_1 в корінь вершини графу g_2. Тобто, $g_1 \cup^* g_2 = g_1 \hat{\cup} g_2 \hat{\cup} < V, \{< s_{g_1}[1], s_{g_2}[1] >\} >$.

9. E_v — виділення кореня графу $g = \langle V, E \rangle$: $E_v(g) = \langle V, \{< s_g[1], s_g[1] >\}$.

Також знадобляться ще й такі функції:

1. D_e — видалення «першої» дуги графу $g = \langle V, E \rangle$.

2. D_v — видалення кореня («першої» вершини), якщо вона ізольована.

3. E_v^{out} — виділення підграфу графу $g = \langle V, E \rangle$, що складається з кореня («першої» вершини) g та всіх від'ємно інцідентних їй дуг: $E_v^{\text{out}}(g) = < V, E_1 >$, де

$$E_1 \equiv E \setminus \{< s_g[1], v_j > \big| v_j \neq s_g^-(s_g[1])[r];\ r = 1,..., \delta_g^-(s_g[1])\}.$$

4. $C_{\Delta_{\mathsf{G}}}$ — функція генерації порожнього графу: $C_{\Delta_{\mathsf{G}}}(g) = \Delta_{\mathsf{G}}$.

Покладемо $\sigma_{\mathsf{G}} := \{C_0^{\mathsf{G}}, S_{\mathsf{G}}, \hat{\cup}, \setminus, E_e, R, A, \cup^*, E_v, =_{\mathsf{G}}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\ldots}$.

Можна безпосередньо перевірити, що всі ці функції є частково-рекурсивними.

З метою моделювання граф-функцій векторними побудуємо кодуюче відображення $\phi : \mathsf{G} \to \mathsf{N}^*$, де $\mathsf{N}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathsf{N}^i$, $\mathsf{N}^0 = \{\Lambda\}$, таким чином. Нехай g — деякий граф, $A_g = \left\| a_{ij} \right\|_{mn}$ — відповідна йому матриця. Покладемо

$$\phi(\Delta_{\mathsf{G}}) = \Lambda,$$

$$\phi(g) = a_{1i_1} \ldots a_{1i_{l_1}} 0 a_{2j_1} \ldots a_{2j_{l_2}} 0 \ldots a_{mk_1} \ldots a_{mk_{l_m}}, \tag{1}$$

де a_{si_r} — ненульові елементи матриці A.

Очевидно, ϕ — ін'єкція, але не сюр'єкція. Позначимо, $\mathsf{V} := \phi(\mathsf{G})$. Вочевидь, ця множина є рекурсивною в нумерації α_{G}.

Нижче під L-функцією (L-предикатом) мається на увазі багатомісна часткова операція (предикат) на множині L.

Означення 1. V-функцію $F(x_1, \ldots, x_n)$ назвемо векторним образом граф-функції $\mathsf{F}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, якщо $F(\phi(g_1), \ldots, \phi(g_n)); \phi \mathsf{F}(g_1, \ldots, g_n)$ для всіх $g_1, \ldots, g_n$. Аналогічно V-предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ назвемо векторним образом граф-предиката $\mathsf{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, якщо $P(\phi(g_1), \ldots, \phi(g_n)); \phi \mathsf{P}(g_1, \ldots, g_n)$ для всіх $g_1, \ldots, g_n$.

Лема 1. Векторний образ чр-граф-функції (чр-граф-предиката) є чр-V-функція (чр-V-предикат).

Доведення. Доведення випливає із теореми 2.1.5 [22].

Безпосередньо із рекурсивності множини V випливає наступна лема.

Лема 2. Будь-яка чр-V-функція є чр-N^*-функцією (векторною чр-функцією). Для чр-V-предикатів аналогічно.

Наслідок 1. Векторний образ чр-граф-функці (чр-граф-предиката) є векторною чр-функцією (векторним чр-предикатом).

З метою моделювання векторних функцій граф-функціями побудємо кодуюче відображення $\Phi : \mathsf{N}^* \to \mathsf{G}$ таким чином:

$$\Phi(\Lambda)=\Delta_{\mathsf{G}},$$

$$\Phi(v)=\begin{Vmatrix}1 & v_1\\ \vdots & \vdots\\ n & v_n\end{Vmatrix}.$$

Означення 2. Граф-функція $\mathsf{F}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ називається граф-моделлю векторної функції $F(x_1,\ldots,x_n)$, якщо $\mathsf{F}(\Phi(v_1),\ldots,\Phi(v_n));\ \Phi(F(v_1,\ldots,v_n))$ для всіх $v_1,\ldots,v_n$. Граф-модель предиката вводиться аналогічно.

Лема 3. Для будь-яких векторних чр-функцій та чр-предикатів існують їх граф-моделі, які належать замиканню $[\sigma_{\mathsf{G}}]_\Omega$.

Доведення. Доведення проводиться індукцією по довжині відповідних константних термів алгебри $A_{\mathsf{N}^*}^{\text{чр}}$.

Базис. Граф-моделлю векторної функції C_0 є функція C_{G_0}, а функції S — S_{G}.

Побудуємо граф-моделі для $\Pi,\circ$.

1. $\mathsf{G}_1(\pi,\xi)=(S(\pi)\neq\xi)\underset{\pi,\xi}{*}\langle S(\pi),E_v(\xi)\rangle$. $\mathsf{G}_1(\Delta_{\mathsf{G}},\xi)$ дає граф з однієї вершини, номер якої на 1 менший за номер першої вершини ξ.

$$\mathsf{G}_2(\xi)=E_e(R(\mathsf{G}_1(\Delta_{\mathsf{G}},\xi)\cup^*\xi));$$

$$\mathsf{G}_3(\pi,\xi)=(\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}\langle\pi\,\hat{\cup}\,\zeta,D_e(\xi),\mathsf{G}_2(E_e(\xi))\rangle.$$

Тоді $\mathsf{F}_\Pi(g)=\mathsf{G}_3(\Delta,D_e(g))$ — граф-модель функції Π.

2. Аналогічно тому, як ми будували функції $\mathsf{G}_3,\mathsf{G}_4$, можемо визначити функцію, яка збільшує номер першої вершини на таку величину, яка нам потрібна. Позначимо її $M(\pi,\{n\})$, де $\{n\}$ — граф із однієї вершини, номер якої n. Тобто, функція $M(\pi,\{n\})$ повертає граф π, в якого перша вершина має номер n.

Нехай $\mathsf{F}_2(\pi)$ — функція, яка перераховує дуги графа π (результатом її дії є граф з однієї вершини, що має номер рівний кількості дуг графу).

Позначимо $\mathsf{G}_6(\pi,\xi,\zeta)=(\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi}{*}\langle\pi\,\hat{\cup}\,M(E_v^{\text{out}}(\xi),\zeta),D_v(\xi),\zeta\rangle$. Тоді $\mathsf{F}_\circ(g_1,g_2)=g_1\,\hat{\cup}\,\mathsf{G}_6(\Delta,g_2,g_1)$ — граф-модель функції $\circ$.

Індуктивний крок. Тут варто врахувати те, що суперпозиція граф-моделей векторних функцій є граф-моделлю суперпозиції відповідних векторних функцій. Для розгалуження та циклювання — аналогічно.

Нехай $\psi:=\phi\Phi$. Очевидно, що $\psi:\mathsf{G}\to\Phi(\mathsf{V})$ — бієкція. Через χ позначимо будь-яке розширення відображення ψ^{-1}. Граф-функції ψ та χ відіграють роль кодуючої та декодуючої функцій відповідно.

Безпосередньо із наведених вище означень випливає лема.

Лема 4. Нехай $\mathsf{F}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — чр-граф-функція, а $\mathsf{H}(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ — граф-модель векторного образу функції $\mathsf{F}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Тоді

$$\mathsf{F}(A_1,\ldots,A_n)=\chi(\mathsf{H}(\psi(A_1),\ldots,\psi(A_n)))$$

для всіх A_i, $i=\overline{1,n}$.

Аналогічно, нехай $\mathsf{P}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ — чр-граф-предикат, а $\mathsf{K}(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ — граф-модель векторного образу цього предиката. Тоді

$$\mathsf{P}(A_1,\ldots,A_n)=\mathsf{K}(\psi(A_1),\ldots,\psi(A_n))$$

для всіх A_i, $i=\overline{1,n}$.

Таким чином, для доведення повноти залишається побудувати функції ψ та χ.

Лема 5. Має місце

$$\psi,\chi\in[\sigma_{\mathsf{G}}].$$

Доведення.

1. Почнемо з функції ψ.

Покладемо

$$\mathsf{G}_1(\pi,\xi,\zeta)=(D_e(R(E_e(\zeta)))\neq\tau)\underset{\pi,\xi,\zeta,\tau}{*}\langle\pi\cup\xi,E_e(\zeta),D_e(\zeta),\tau\rangle.$$

$\mathsf{G}_1(\Delta,g,D_e(R(E_e(g))))$ виділяє підграф усіх ребер, що є від'ємно інцідентними його першій вершині.

Розглянемо також $\mathsf{G}_2(\pi,\xi,\zeta)=(\zeta\cup^{*}D_e(R(E_e(\xi))))\ \hat{\cup}((\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}$ $\langle\pi\,\hat{\cup}\ (\zeta\cup^{*}\ A(E_e(\xi)))$, $D_e(\xi)$, $S_{\mathsf{G}}(\zeta)\rangle)$. Тоді функція $\mathsf{G}_2(\Delta,$ $\mathsf{G}_1(\Delta,$ $g,D_e(R(E_e(g))))$, $g_0^1)$ перетворює перший підграф графу G необхідним чином.

Введемо ще функції $\mathsf{G}_3(\{m\},\ \{n\})=(m+n)$ — збільшення номера вершини нульового графу на n, та $\mathsf{G}_4(\xi)$ — підрахування кількості ребер π. $\mathsf{G}_4(\xi)=\blacklozenge((E_e(\xi)=\Delta),\Delta,\mathsf{F}(\{1\},\ D_e(\xi)))$, де $\mathsf{F}(\pi,\xi)=(E_e(\xi)\neq\delta)$ $\underset{\pi,\xi}{*}\langle S_{\mathsf{G}}(\pi),D_e(\xi)\rangle$.

Отримаємо, що $\mathsf{G}_5(\Delta,g,g_0,F)$, де $\mathsf{G}_5(\pi,\ \xi,\ \zeta)=(E_e(\xi)\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}$ $\langle\pi\ \hat{\cup}(\mathsf{G}_2(\Delta,\ \xi,\ S_{\mathsf{G}}(\zeta)))$, $\xi\setminus\ \mathsf{G}_2(\Delta,\ \xi,\ S_{\mathsf{G}}(\zeta))$, $S_{\mathsf{G}}(\mathsf{G}_3(\zeta,\ \mathsf{G}_4(\mathsf{G}_2(\Delta,\ \xi,$ $S_{\mathsf{G}}(\zeta)))))\rangle$, кодує всі існуючі ребра графу G.

Нам залишилось додати до графу-коду $\widetilde{g}$ дуги, що відповідають ізольованим вершинам графу g. Для цього використаємо функцію

$$\mathsf{G}_6(\pi,\xi,\zeta)=(\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}\langle\pi\,\hat{\cup}\ (\zeta\ \cup^{*}E_v(\xi)),\ D_v(\xi),S_{\mathsf{G}}^2(\zeta)\rangle.$$

Таким чином, $\psi(g)=\mathsf{G}_5(\Delta,g,g_0)\ \hat{\cup}\,\mathsf{G}_6(\Delta,g\setminus((\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi}{*}\langle\pi\,\hat{\cup}\,E_e(\xi)$, $D_e(\xi)\rangle)$, $S_{\mathsf{G}}^2(\mathsf{G}_4(g_0^1,\ \mathsf{G}_5(\Delta,\ g,g_0))))$ як раз задає функцію ψ.

2. Тепер розглянемо функцію χ.

Розглянемо функції

$$\mathsf{G}_7(\pi,\zeta) = (S_{\mathsf{G}}^2(D_e(R(\xi))) \neq D_e(R(E_e(\zeta)))) \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \langle \pi \hat{\cup} \xi, E_e(\xi), D_e(\zeta) \rangle,$$

$$\mathsf{G}_8(\xi) = D_e(R(E_e(\xi))),$$

$$\mathsf{G}_9(\pi,\xi,\tau) = (\tau \neq \Delta) \underset{\pi,\xi,\zeta,\tau}{*} \langle \pi \cup (\xi \cup^* \zeta), \xi, \mathsf{G}_8(\tau), D_e(\tau) \rangle,$$

$$\mathsf{G}_{10}(\pi,\xi) = (\xi \neq \Delta) \underset{\pi,\xi}{*} \langle \pi \hat{\cup} \mathsf{G}_9(\Delta, \mathsf{G}_8(\mathsf{G}_7(\Delta,\xi)), D_e(\mathsf{G}_7(\Delta,\xi))), \xi \setminus \mathsf{G}_7(\Delta,\xi) \rangle.$$

Тут $\mathsf{G}_7(\Delta,\tilde{g})$ виділяє підграф, який складається із дуг, від'ємно інцідентних першій вершині, потім другій тощо, поки не зустрінеться вершина, яка не має від'ємно інцідентних дуг. Функція $\mathsf{G}_8(\tilde{g})$ визначає вершину, з якої мають виходити дуги до інших вершин. $\mathsf{G}_9(\Delta, \mathsf{G}_8(\tilde{g}_s),$ $D_e(\tilde{g}_s))$ виконує перетворення виділеного підграфу $\tilde{g}_s = \mathsf{G}_7(\Delta,\tilde{g})$. А отже,

$$\chi((\tilde{g})) = \mathsf{G}_{10}(\Delta,(\tilde{g})).$$

Теорема 1. σ_{G} є породжуючою множиною алгебри $A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}}$.

Доведення. Доведення теореми безпосередньо випливає із наслідка 1 та лем 3, 4.

ВИСНОВКИ

Зауважимо, що рівність із сукупності σ_{G} не можна видалити як єдиний предикат системи.

З усіх функцій σ_{G} лише S_{G} не є зберігаючою денотати (денотата в цьому випадку — вершина). Лише функція E_e не зберігає множину графів, з кількістю дуг більшою або рівною 2. Лише функція E_v не зберігає множину графів, які мають хоча б одну (непусту) дугу.

Таким чином, функції S_{G}, E_e, E_v та предикат $=_{\mathsf{G}}$ не можуть бути вилучені з породжуючої сукупності σ_{G}. Щодо інших функцій із σ_{G} питання залишається відкритим. Тому, хоча питання існування I_m^n-базису ППА $A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}}$ принципово вирішується відповідною теоремою, що наведена в розділі 2 цієї роботи, пошук природнього для області графових перетворювачів I_m^n-базису є актуальною задачею. Вирішенню останньої будуть присвячені декілька подальших робіт.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 391 с.
2. *Колмогоров А.Н., Успенский В.А.* К определению алгоритма // Успехи матем. наук. — 1958. — **13**, № 4. — С. 3–28.

3. *Asser G.* Berechenbare Graphenabbildungen/-In:Kompliziertheit von Lern-und Erkennungsprozessen. — Jena: Friedrich-Schiller-Universitat, 1975. — P. 7–17.
4. *Заславский И.Д.* Граф-схемы с памятью // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1964. — **72**. — С. 99–192.
5. *Babai L., Grigoryev D., Mount D.* Isomorphism of graphs with bounded eigenvalue multiplicity // Proc. 14th ACM symp. On theory of comput., STOC. — 1982. — P. 310–324.
6. *Пролубников А.В.* Прямой алгоритм проверки изоморфизма графов // Компьютерная оптика: сб. научн. тр.; под ред. акад. РАН Ю.И. Журавлева. — Изд-во Самарского гос. ун-та. — 2007. — Вып. 27. — С. 123–128.
7. *Foggia P., Sansone C., Vento M.* A database of graphs for isomorphism and subgraph isomorphism benchmarking // Proc. of the 3rd IAPR TC-15 international workshop on graph-based representations. — Italy, 2001. — P. 157–168.
8. *Spence E.* The Stromgly Regular (40, 12, 2,4) Graphs // The Electronical Journal Of Combinatorics. — 2000. — **7**, № 1. — P. R22.
9. *Ершов А.П.* Вычислимость в произвольных областях и базисах // В кн.: Семиотика и информатика. Вып. 19. — М.: Изд. ВИНИТИ, 1979. — С. 3–58.
10. *Агафонов В.Н.* Спецификация программ: понятийные средства и их организация. — Новосибирск: Наука, 1987. — 240 с.
11. *Буй Д.Б., Редько В.Н.* Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1984. — № 1. — С. 69–71.
12. *Буй Д.Б., Мавлянов А.В.* К теории программных алгебр // Укр. мат. журн. — 1984. — № 6. — С. 761–764.
13. *Буй Д.Б.* Примитивные программные алгебры: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1985. — 22 с.
14. *Буй Д.Б., Редько В.Н.* Примитивные программные алгебры. II // Кибернетика. — 1984. — № 5. — С. 1–7.
15. *Буй Д.Б.* Неперервність в індуктивних множинах: основні поняття та допоміжні результати // Вісн. Київського Ун-ту. Сер.фіз.-мат. науки. — 1998. — Вип. 1. — С. 142–148.
16. *Буй Д.Б.* Неперервність в індуктивних множинах: неперервність суперпозиції та суміжні результати // Вісн. Київського Ун-ту. Сер.фіз.-мат. науки. — 1998. — Вип. 2. — С. 187–195.
17. *Буй Д.Б.* Неперервність в індуктивних множинах: неперервність рекурсії та суміжні результати // Вісн. Київського Ун-ту. Сер.фіз.-мат. науки. — 1998. — Вип. 3. — С. 128–138.
18. *Буй Д.Б., Поляков С.А.* Композиційна семантика SQL-подібних мов: табличні структури даних, композиції, приклади // Вісн. Київського Ун-ту. Сер.фіз.-мат. науки. — 1999. — Вип. 1. — С. 130–140.
19. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
20. *Голунков Ю.В.* О полноте операций в системах алгоритмических алгебр // Алгоритмы и автоматы. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. — С. 11–53.
21. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. — СПб: Питер, 2000. — 304 с.
22. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры. Том I // Успехи мат. наук. — 1961. — № 3. — С. 3–60.

Надійшла 27.11.2009